

УДК 624.131.522

DOI: 10.17213/mgvgif/2026-5-446-460

ОТОБРАЖАЮЩИЕ ФУНКЦИИ В ГЕОМЕХАНИКЕ

А. Н. Ушаков

Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Россия

Аннотация. При проектировании, строительстве и последующей эксплуатации сооружений, возводимых в сложных геологических условиях, необходим прогноз напряженного состояния грунтовых массивов, являющихся основаниями сооружений. Если основание имеет сложное геометрическое строение, то определение его напряженного состояния существенно зависит от формы границы. Аналогичная ситуация имеет место и при исследовании напряженного состояния горных массивов с криволинейными границами, находящимися под действием различных сил. В двумерном случае криволинейная граница может быть описана при помощи специально построенной функции комплексного переменного, совершающей конформное отображение одной из канонических областей на полубесконечную область. Другой, не менее важной проблемой геомеханики, является задача, связанная с исследованием напряженного состояния вблизи контуров и в точках контуров подземных горных выработок, формы поперечных сечений которых могут быть получены при помощи функций комплексного переменного, осуществляющих конформные отображения внутренности или внешности единичного круга на бесконечные односвязные области, границами которых являются семейства кривых, имитирующих отверстия различной конфигурации. На основе анализа напряженного состояния в точках контуров выработок могут быть вычислены значения предельных глубин их заложения и допустимые величины всестороннего равномерного растягивающего давления, действующего по контурам выработок. В данной работе приведен обзор функций комплексного переменного (отображающих функций), описывающих различные типы криволинейных границ горных (грунтовых) массивов, подземных выработок различных форм поперечного сечения, разработанных для решения задач геомеханики. Рассмотрены примеры отображающих функций, которые могут найти применение в задачах, связанных с оценкой напряженного состояния горных (грунтовых) массивов сложного рельефа, подверженных приложенным к их границам нагрузкам.

Ключевые слова: криволинейная граница, конформность, напряженное состояние

MAPPING FUNCTIONS IN GEOMECHANICS PROBLEMS

A. N. Ushakov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia

Annotation. In the design, construction, and subsequent operation of structures built in complex geological conditions, it is necessary to predict the stress state of soil masses that serve as foundations for these structures. If the foundation has a complex geometric structure, determining its stress is significantly dependent on the shape of its boundary. A similar situation arises when studying the stress state of rock masses with curvilinear boundaries subjected to various forces. In the two-dimensional case, a curvilinear can be described using a specially constructed complex variable function that performs a conformal mapping from one of the canonical regions onto a semi-infinite region. Another, equally important problem in geomechanics, is the task related to investigating the stress state near the contours and at the points of

contours of underground mine workings, whose cross-sectional shapes can be obtained using complex variable functions that perform conformal mappings of the interior or exterior of the unit circle onto simply connected regions. The boundaries of these regions are families of curves that mimic openings of various configurations. Based on analysis of stress state at the contour points of workings, the limiting depths of their placement and the permissible values of all-around uniform tensile pressure acting along the contours of the workings can be calculated. This paper provides a review of complex variable functions (conformal mapping functions) that describe various types of curvilinear boundaries of rock (soil) masses and underground workings of different cross-sectional shapes, developed for solving geomechanics problems. Examples of conformal mapping functions that can be applied to problems related to assessing the state stress of rock (soil) masses with complex topography subjected to loads applied to their boundaries are considered.

Keywords: *curvilinear boundary, conformability, stress state*

Хорошо известно [1, 2], что одной из важнейших проблем геомеханики является задача, связанная с исследованием напряженно-деформированного состояния горных или грунтовых массивов, находящихся под действием различных сил, приложенных к их границам. Если участки земной поверхности имеют сложный рельеф, то изучение напряженного состояния в массивах горных (грунтовых) пород сводится к решению граничных задач для областей с криволинейными границами. При этом, полагая горную (грунтовую) среду линейно-деформируемой, приходим к постановке задачи теории упругости для однородной и изотропной полуплоскости с криволинейной границей, форма которой определяется при помощи так называемой отображающей функции – функции комплексной переменной $z = \omega(\zeta)$, осуществляющей отображение одной из канонических областей на область с границей, имитирующей рельеф рассматриваемого горного (грунтового) массива. В качестве канонических областей чаще всего выступают внутренность (внешность) единичного круга или нижняя полуплоскость. Теорема Римана [3], устанавливающая существование такой функции, не указывает алгоритма ее нахождения. Эффективное построение функции, совершающей конформное отображение, представляет собой весьма нетривиальную задачу, однако даже если эта функция известна, она может иметь вид, затрудняющий ее дальнейшее использование. Поэтому приходится заменять точные выражения для функций на более простые и хорошо изученные. К этим функциям, прежде всего, необходимо отнести полиномы с положительными и отрицательными степенями. Данное обстоятельство привело к созданию эффективных приближенных методов построения отображающих функций [4–7].

Выше было отмечено, что одной из задач, требующих для получения решения построение отображающей функции, является задача изучения напряженно-деформированного состояния в горных (грунтовых) массивах, криволинейные границы которых подвержены действию различных нагрузок. Будем в дальнейшем для краткости именовать ее *задачей I*.

Другой, не менее важной задачей, требующей разработки отображающей функции, является задача, связанная с исследованием напряженно-деформированного состояния горных пород вокруг подземных горных выработок и в точках их контуров. Поскольку один из размеров выработок, как правило, длина, во много раз превышает два других, то задача по вычислению компонент напряжений и перемещений может быть сведена к плоской. Эту задачу будем называть *задачей II*. Для ее решения необходимо построение функции, совершающей конформное отображение канонической области, которой, как правило, является внутренность (внешность) единичного круга, на область, имитирующую подземную выработку заданной конфигурации. При этом заметим, что если выработка находится на достаточно большой глубине, то соответствующую область можно считать односвязной, если же эта глубина невелика, то область будет двусвязной и соответствующее отображение может быть построено лишь на двусвязную область, простейшим примером которой является кольцо.

Целью настоящей статьи является обзор отображающих функций, разработанных для решения различных задач геомеханики, а также примеры отображающих функций, которые могут найти применение в механике грунтов и горных пород.

В начале XX века для решения плоских задач теории упругости был разработан весьма эффективный метод, использующий мощный аппарат теории функций комплексного переменного. Построенный в основном Г. В. Колосовым [8] и существенно развитый Н. И. Muskhelishvili [9], он нашел широкие применения в механике деформируемого твердого тела [10–15]. В конце 60-х гг. метод комплексных потенциалов Колосова–Muskhelishvili был использован при решении *задач I и II*. В рамках модели линейно-деформируемой среды для решения этих задач можно воспользоваться методами математической теории упругости [15, 16], к числу которых относится метод комплексных потенциалов Колосова–Muskhelishvili [9], позволяющий получать аналитические решения задач о распределении напряжений в горных (грунтовых) массивах с криволинейными границами, формы которых задаются при помощи специально разрабатываемых для каждого из таких случаев отображающих функций.

Основное требование, предъявляемое к отображающей функции $\omega(\zeta)$, состоит в том, что осуществляемое ею отображение канонической области D на область с криволинейной границей G должно быть конформным, т. е. функция $\omega(\zeta)$ должна быть однолистной в области D и дифференцируемой во всех точках этой области за исключением, быть может, одной точки, в которой эта функция имеет полюс первого порядка [3]. При этом функция $f(z)$ называется однолистной в области D , если любым различным значениям $\zeta_1 \neq \zeta_2$, взятым из области D , соответствуют различные значения функции $\omega(\zeta_1) \neq \omega(\zeta_2)$.

Использование метода комплексных потенциалов привело к разработке отображающих функций, описывающих формы криволинейных границ, необходимых для решения различных задач геомеханики. Приведем примеры отображающих функций, использованных для решения этих задач. Начнем с рассмотрения функций, предложенных их авторами для решения задачи I.

Одной из первых в этом направлении была работа Н. С. Курдина и В. Н. Телиянца [17], в которой была рассмотрена функция вида

$$z = \omega(\zeta) = \gamma \zeta \left(\frac{iB}{c(\zeta - ci)} \right), \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta \leq 0$, γ — коэффициент пропорциональности; B, c — постоянные, ξ и η — действительные переменные, осуществляющая отображение нижней полуплоскости на полубесконечную область, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \frac{\gamma \xi}{\xi^2 + (\eta - c)^2} (B + \xi^2 + (\eta - c)^2), \\ y(\xi, \eta) &= -\frac{\gamma}{c(\xi^2 + (\eta - c)^2)} (B\xi^2 + \eta(B(\eta - c) - c(\xi^2 + (\eta - c)^2))). \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая в (2) $\zeta = t$, $\eta = 0$, получим параметрические уравнения контуров полубесконечных областей в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\gamma t}{t^2 + c^2} (B + t^2 + c^2), \\ y(t) &= -\frac{\gamma B t^2}{c(t^2 + c^2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

описывающие граничные кривые рассматриваемых областей. Границы областей, построенные на основании уравнений (3), представлены на рис. 1.

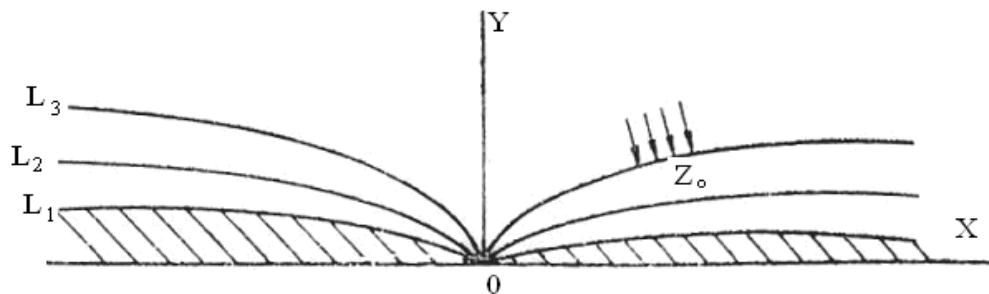


Рис. 1. Границы областей при $\gamma = 2$ и значениях $B/c^2 = -0,3(L_1); -0,6(L_2); -1(L_3)$ [17]

Прямая проверка показывает, что отображение (1) конформно во всех точках расширенной комплексной плоскости.

Существенным моментом, влияющим на точность решения задачи, является наличие на границе области особых точек, т. е. точек, в которых теряется гладкость. Поскольку в этих точках значения компонент напряжения очень велики и вблизи этих точек поле напряжений подвержено сильному искажению, их определение имеет важное значение. Известно [18], что особые точки, лежащие на кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, находятся из условия одновременного равенства нулю производных этих функций. Тогда, вычисляя производные функций $x(t)$ и $y(t)$ из уравнений (3), получаем равенство $B = -c^2$. При этом условии на границе области имеется точка возврата, а при условии $B < -c^2$ граница имеет точки самопересечения. Эти условия приведены в работе [17].

В работах [19, 20] рассмотрена функция

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\zeta - \frac{B\zeta - b}{\zeta + a - di} \right), \quad (4)$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta \leq 0$, $B, a, b, d > 0$ — постоянные величины, c — коэффициент пропорциональности, отображающая нижнюю полуплоскость на область с криволинейной границей. Заметим, что функция (4) дает практически тот же класс криволинейных границ, что и функция (1). Полагая в (4) $d = 1$, получим отображающую функцию, предложенную в [21].

Несколько более сложная функция была рассмотрена в [22]. Она имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = h \left(\zeta + \frac{A - b\zeta}{\zeta + a - i} - \frac{Bi}{(\zeta - i)^2} - \frac{C}{(\zeta - i)^3} \right), \quad (5)$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta \leq 0$, A, B, C, a, b — постоянные коэффициенты; h — коэффициент пропорциональности.

Отделяя действительную и мнимую части уравнения (5), а затем полагая $\zeta = t$, $\eta = 0$, получим параметрические уравнения

$$\begin{aligned} x(t) &= t + \frac{(A - bt)(t + a)}{(t + a)^2 + 1} + \frac{2Bt}{(t^2 + 1)^2} + \frac{C}{(t^2 + 1)^3}, \\ y(t) &= -\frac{A - bt}{(t + a)^2 + 1} - \frac{B(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} + \frac{C(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^3}, \end{aligned} \quad (6)$$

описывающие граничные кривые полубесконечных областей.

На рис. 2, 3 приведены симметричные и несимметричные относительно оси ординат области с криволинейными границами, которые описываются уравнениями (6) при различных значениях коэффициентов.

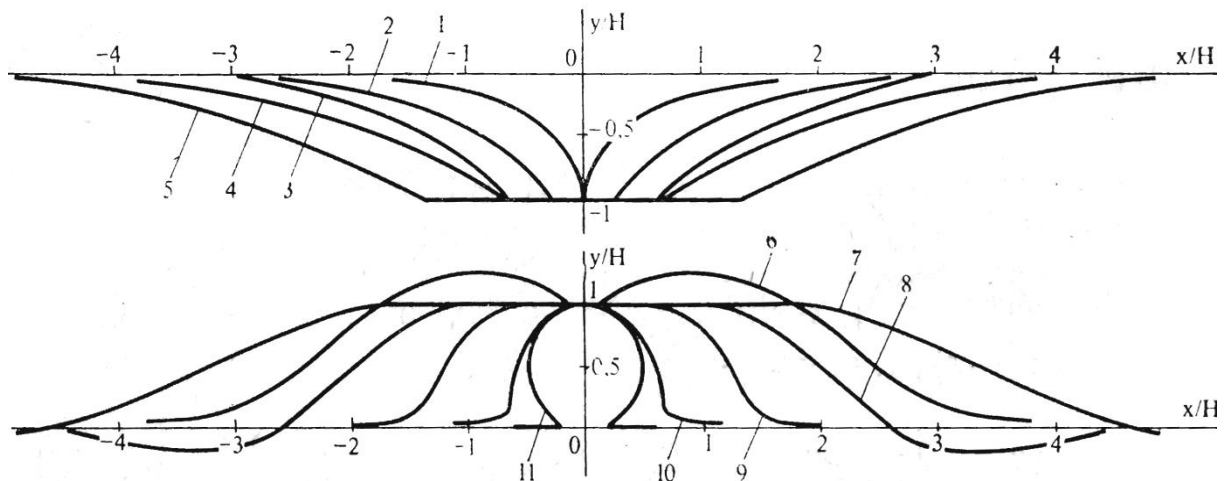


Рис. 2. Симметричные границы полубесконечных областей при $a = b = 0$ при различных значениях A, B, C в относительных координатах $y/H, x/H$ [22]

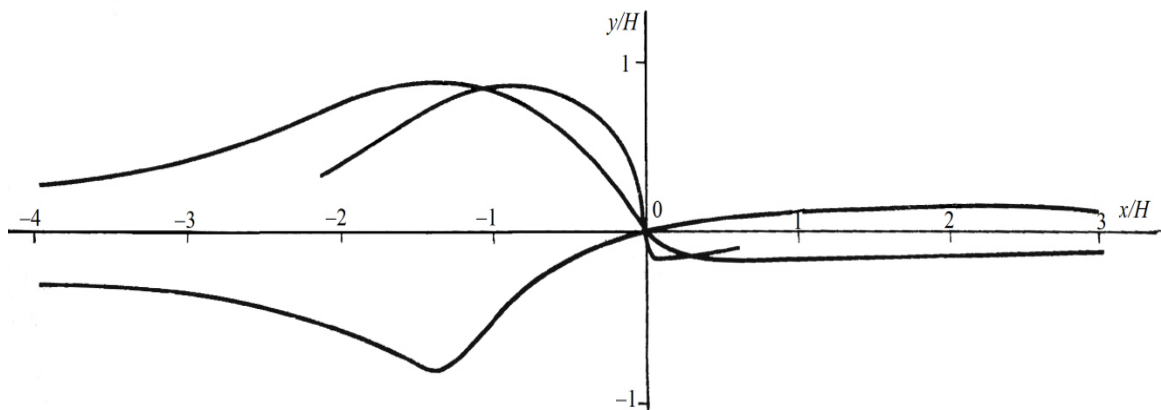


Рис. 3. Несимметричные границы полубесконечных областей при $B = C = 0$ и различных значениях A, b, a в относительных координатах $y/H, x/H$ [22]

Отображающие функции (1), (4), (5) были использованы для исследования напряженного состояния горных массивов с криволинейными границами, однако они оказываются малопригодными для анализа напряженного состояния откосов и склонов в связи с исследованиями устойчивости возводимых на них строительных сооружений, так как области с криволинейными границами, полученные в результате приведенных выше отображающих функций, имеют выемки незначительной ширины.

Решение задач геомеханики, связанных с расчетом несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов сложного рельефа потребовало разработки отображающих функций, учитывающих этот фактор.

В.К. Цветковым [23] была предложена отображающая функция

$$z = \omega(\zeta) = C_0 + \frac{C_1}{1+\zeta} + \sum_{k=0}^6 C_{2k+1} \zeta^{2k+1}, \quad (7)$$

где $C_0, C_{-1}, C_1, \dots, C_{13}$ — вещественны, совершающая конформное отображение полуплоскости с криволинейной границей на внутренность единичного круга.

Предложенный в [23] способ приближенного конформного отображения, названный им методом «плавающих точек», в зависимости от значений коэффициентов позволяет получать достаточно широкий класс криволинейных границ. Это обстоятельство особенно важно, поскольку степень точности решения задачи теории упругости тесно связана со степенью точности конформного отображения. Исследуя устойчивость откосов и склонов на основании анализа напряженного состояния приоткосной зоны, автор рассматривает отображение полуплоскости с трапециевидным вырезом.

Отметим, что в более ранних работах [24] В.К. Цветков использовал упрощенный вид функции (7).

Наконец, А. Н. Богомоловым в работе [25] была рассмотрена функция вида

$$z = \omega(\zeta) = C_0 + C\zeta + \sum_{k=0}^n \frac{C_{2k+1}}{(\zeta + a - bi)^{2k+1}}, \quad (8)$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta \leq 0$, $C_0, C, C_1, \dots, C_{2n+1}$ — вещественные или комплексные числа, а $a, b > 0$ — вещественные числа, осуществляющая отображение нижней полуплоскости на полуплоскость с весьма разнообразным спектром криволинейных границ. При этом функция (8), как показано на рис.4, гораздо точнее приближает трапециевидный вырез к границе полуплоскости, чем функция (7), и является существенным обобщением отображающих функций (1), (4), (5). Типы криволинейных границ, которые могут быть получены при помощи отображающей функции (8), приведены в [25].

Заметим, что все рассмотренные выше отображающие функции принадлежат к классу дробно-рациональных функций, однако они могут иметь и более сложный вид.

Примером тому является приведенная в [26] отображающая функция

$$z = \omega(\zeta) = \frac{2ai}{\pi} \left[\zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} - \ln \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right] - a, \quad (9)$$

совершающая конформное отображение верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ на внешность полуполосы $\text{Im } z > 0, |\text{Re } z| < a$ с соответствием точек $z(0) = 0, z(1) = -a, z(\infty) = \infty$. При помощи функции (9) решена задача об определении напряженного состояния грунтового основания под фундаментом глубокого заложения.

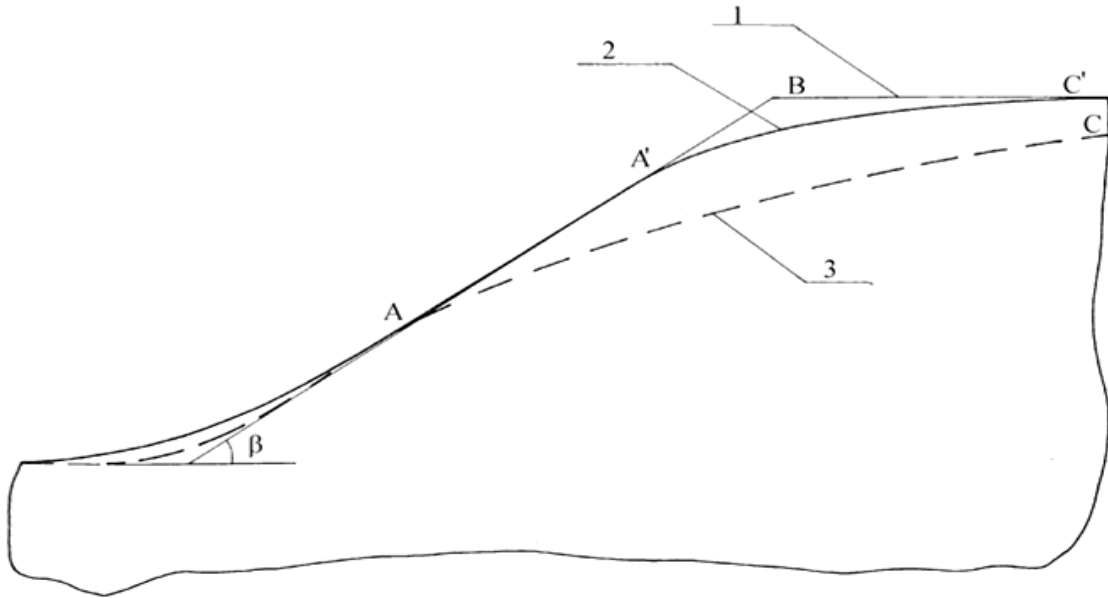


Рис.4. Наложение криволинейных и прямолинейного и контуров при $\beta = 35^\circ$: 1 – прямолинейный контур, 2 – криволинейный контур, соответствующий отображающей функции (8); 3 – контур, отображаемый функцией (7) [25]

Рассмотренные отображающие функции описывают границы областей, не предполагающие наличие неровностей или нерегулярностей. Однако в действительности они вполне возможны и их учет необходим при решении задач, связанных с оценкой напряженного состояния горных (грунтовых) массивов.

Рассмотрим примеры отображающих функций, при помощи которых можно описать эти особенности.

Пусть граница полуплоскости задана уравнением $y = \varepsilon f(x)$, где ε — малый параметр, $f(x)$ — функция, описывающая форму неровностей, как периодических, так и непериодических. Найдем функцию, осуществляющую конформное отображение нижней полуплоскости на полуплоскость с искривленной границей.

Примем искомое отображение в виде

$$\omega(z) = z + \varepsilon \varphi(z) + O(\varepsilon^2), \quad (10)$$

где $\varphi(z)$ — голоморфная в нижней полуплоскости функция, такая что $\varphi(z) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$.

На действительной оси в плоскости z точка $z = x$ должна перейти в точку на кривой $\omega = u + iv$, где $v = \varepsilon f(u)$.

Подставляя $z = x$ в разложение (10), и, полагая $\varphi(z) = \varphi_1(z) + i\varphi_2(z)$, получим

$$\begin{aligned} u &= x + \varepsilon \varphi_1(x), \\ v &= \varepsilon \varphi_2(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Так как по условию $v = \varepsilon f(u)$, а $u \approx x$, то имеем

$$\varepsilon \varphi_2(x) = \varepsilon f(x) \Rightarrow \operatorname{Im} \varphi(x) = f(x).$$

Таким образом, необходимо найти голоморфную в нижней полуплоскости функцию $\varphi(z)$ по ее мнимой части на границе.

Используя интеграл типа Шварца для полуплоскости [3], получаем

$$\omega(z) = z + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (12)$$

В качестве примера рассмотрим функцию $f(t) = \sin kt, k > 0$ и, используя формулу (12), получим выражение для отображающей функции, описывающей заданную форму неровности.

Имеет место равенство

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kt}{t-z} dt = -\frac{1}{2} e^{-ikz}. \quad (13)$$

Действительно, используя формулу Эйлера, имеем

$$\sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}.$$

Тогда интеграл $F(z)$ можно разбить на два

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i(t-z)} dt = \frac{1}{4\pi i^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t-z} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikt}}{t-z} dt \right) = -\frac{1}{4\pi} (I_1 - I_2). \quad (14)$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t-z} dt.$$

Так как в экспоненте e^{ikt} коэффициент $k > 0$, то, замкнем контур в верхней полуплоскости, и, применим лемму Жордана [3]. Поскольку особая точка z находится в нижней полуплоскости, внутри замкнутого контура особых точек нет. По теореме Коши [3] имеем

$$I_1 = 0.$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikt}}{t-z} dt.$$

Так как коэффициент перед it отрицателен, контур необходимо замыкать в нижней полуплоскости. Особая точка $t = z$ попадает внутрь контура. Применяя теорему Коши, находим

$$I_2 = -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-ikt}}{t - z}, z \right) = -2\pi i e^{-ikz}.$$

Подставляя значения I_1 и I_2 в соотношение (14), получим соотношение (13). Далее, подставляя значение интеграла (13) в выражение (12), имеем

$$\omega(z) = z - i\varepsilon e^{-ikz}. \quad (15)$$

Теперь, выделяя в (15) вещественную и мнимую части, а затем, полагая $x = t$, $y = 0$, получим параметрические уравнения контура границы полуплоскости

$$\begin{aligned} u(t) &= t - \varepsilon \sin kt, \\ v(t) &= \varepsilon \cos kt. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что мнимая часть задает форму границы.

Итак, в первом приближении отображающая функция имеет вид (15). Если неровности имеют значительную кривизну, уточненную картину дает разложение функции

$$\omega(z) = z + \varepsilon \varphi_1(z) + \varepsilon^2 \varphi_2(z), \quad (17)$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — голоморфные в нижней полуплоскости функции, стремящиеся к нулю при $y \rightarrow -\infty$. При этом граничное условие становится нелинейным, поскольку значение мнимой части функции будет зависеть от наклона кривой $f'(x)$.

Наконец, заменяя в отображении (10) линейную функцию z на $\Phi(z)$, т. е. полагая

$$\omega(z) = \Phi(z) + \varepsilon \varphi(z) + O(\varepsilon^2), \quad (18)$$

получим отображающую функцию, описывающую малые неровности, накладываемые на криволинейную границу, форма которой задается функцией $\Phi(z)$.

Рассмотрим грунтовый (горный) массив, ослабленный вертикальной трещиной, выходящей на его границу. Будем предполагать, что глубина трещины равна h . Для решения задачи о напряженном состоянии в рассматриваемом массиве необходимо построить конформное отображение нижней полуплоскости на нижнюю полуплоскость с разрезом по отрезку $[0, ih]$, $h > 0$. Это отображение имеет вид $\omega(z) = \sqrt{z^2 - h^2}$.

Используя принцип симметрии Римана–Шварца [3], можно построить конформное отображение нижней полуплоскости на нижнюю полуплоскость с разрезами по отрезкам, отстоящим друг от друга на заданное расстояние.

Теперь предположим, что разрез начинается на вещественной оси и растет внутрь нижней полуплоскости. Конформное отображение нижней полуплоскости на нижнюю полуплоскость с разрезом можно описать при помощи уравнения Левнера [27], которое имеет вид

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \xi(t)}, \quad g_0(z) = z, \quad (19)$$

где $g_t(z)$ — отображение, ликвидирующее разрез; $\xi(t)$ — функция управления — вещественная функция, которая описывает «движение» конца разреза. Разрез начинается в точке $\xi(0)$ на вещественной оси и растет внутрь области по траектории $\gamma(t)$. Заметим, что для нижней полуплоскости при $\xi(t) = 0$ (разрез растет из начала координат вниз) уравнение (19) упрощается и при начальном условии $g_0(z) = z$ прямым интегрированием получаем решение

$$g_t(z) = \sqrt{z^2 + 4t}.$$

Выбор управляющей функции $\xi(t)$ полностью определяет геометрию разреза. Рассматривают следующие типы управляющих функций:

- а) постоянная: $\xi(t) = C$;
- б) линейная $\xi(t) = at$;
- в) степенная $\xi(t) = C \cdot t^\alpha$, C, α — вещественные числа;
- г) случайная (броуновское движение) $\xi(t) = \sqrt{k} B_t$.

В последнем случае B_t — стандартный винеровский процесс; k — вещественный параметр, который определяет «степень извилистости» и топологию разреза.

Для исследования напряженного состояния в горном (грунтовом) массиве со случайным разрезом можно использовать комбинацию конформных отображений и комплексных потенциалов. Для математического описания случайных разрезов можно использовать эволюцию Шрамма–Левнера [27].

Итак, используя построенные выше отображающие функции, можно рассмотреть ряд задач геомеханики, связанных с исследованием напряженно-деформированного состояния грунтовых (горных) массивов при наличии трещин, выходящих на их границу.

Переходя к рассмотрению отображающих функций, разработанных для решения задачи II, заметим, что для горизонтальных выработок круглой

и эллиптической форм поперечного сечения, отображающая функция имеет особенно простой вид

$$\omega(\zeta) = A\zeta^{-1} + B\zeta,$$

где A, B — значения, определяющие размер и форму эллипса.

Для построения отображающих функций односвязных областей, ограниченных многоугольниками, можно использовать интеграл Кристоффеля–Шварца [3]. Используя этот интеграл, выражение для отображающей функции можно получить в виде полинома, либо в другой форме, которая дает возможность аппроксимировать заданный контур с необходимой точностью. Эта точность зависит от количества членов ряда, полученного разложением подинтегральной функции. В монографии [7] подробно рассмотрены случаи прямоугольных отверстий, в том числе и отверстий с различным отношением сторон. Уточнение формы прямоугольников связано с увеличением степени полинома, однако при этом можно получать формы отверстий, отличных от прямоугольных.

В работах [28, 29], рассмотрена отображающая функция вида

$$\omega(\zeta) = i \left(A\zeta^{-1} + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 \right), \quad (20)$$

при помощи которой получено конформное отображение внутренности единичного круга на бесконечную плоскость с отверстиями трапециевидной, треугольной, полуэллиптической, прямоугольной, прямоугольно-эллиптической, прямоугольно-параболической, ромбовидной форм.

В серии работ [30–32] приведены результаты исследований по определению напряженного состояния на контурах подземных горизонтальных выработок различных форм поперечного сечения, описываемых функциями, обобщающими отображение (20), определены предельные глубины их заложения и допустимые величины растягивающего равномерного давления при заданных значениях коэффициента бокового распора горной породы.

В целом, рассматривая отображающую функцию вида

$$\omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^n a_k \zeta^{-k} \right), \quad (21)$$

где $R, a_1, \dots, a_n$ — вещественные числа, конформно отображающую внешность единичного круга на внешность отверстия произвольной формы или функцию

$$\omega(\zeta) = R \left(\zeta^{-1} + \sum_{k=1}^n a_k \zeta^k \right), \quad (22)$$

совершающую конформное отображение внутренности единичного круга на тот же класс отверстий, используя методики для определения коэффициентов, можно получить отверстия наперед заданной формы и размеров.

В частности, в работе [33], отображающая функция (21) была применена для определения напряжений в обделках тоннелей некругового очертания от действия внутреннего напора.

Отметим, что в рассматриваемых выше случаях предполагалось, что контур подземной выработки является гладким, однако реальные контуры имеют технологические неровности. В этом случае отображающая функция должна отражать характер и тип этих неровностей.

В работе [34] рассматривается выработка, контур которой может быть описан с достаточной степенью точности кривой трохоидального типа

$$\omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{C_1}{\zeta^n} + \frac{C_2}{\zeta^m} \right), \quad (23)$$

где R , C_1 , n — величины, определяющие соответственно размеры, очертание и форму контура ($n = 0$, $C_1 = 0$ — окружность, $n = 1$, $0 < C_1 < 1$ — эллипс, $n = 2$, $C_1 = 0,1$ — криво-линейный треугольник (сводчатый контур), $n = 3$, $C_1 = 1/9 - 1/10$ — криволинейный квадрат, $n = 4, 5, 6, \dots$, $0 < C_1 < 1/n$ — криволинейный многоугольник, соответствующий полигональному контуру); C_2 — амплитуда возмущений в долях R ; m — целое число возмущений без единицы.

При помощи функции (23) авторы статьи исследуют напряженное состояние упруго-ползучих горных пород вблизи закрепленной горной выработки с контуром, имеющим неровности.

Наконец, рассматривая отображающие функции вида

$$\omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^n a_k \zeta^{-k} + C \zeta^{-m} \right) \quad (24)$$

или

$$\omega(\zeta) = R \left(\zeta^{-1} + \sum_{k=1}^n a_k \zeta^k + C \zeta^m \right), \quad (25)$$

где $m > n$, получим классы отверстий различных форм поперечного сечения при наличии неровностей, причем значение C описывает их «амплитуду» а m — «частоту».

Отметим, что функции (24) и (25) могут быть использованы для исследования напряженного состояния вблизи и в точках контуров подземных горизонтальных выработок различной конфигурации с неровностями. В частности, при их помощи можно оценить влияние неровностей на допустимую глубину заложения выработок.

Заключение

Приведен обзор отображающих функций, описывающих типы криволинейных границ горных (грунтовых) массивов сложного рельефа, формы поперечных сечений подземных горизонтальных выработок, необходимых для решения различных задач геомеханики.

Приведены примеры отображающих функций, описывающих неровности и нерегулярности границ горных (грунтовых) массивов.

Предложенные отображающие функции могут быть использованы в задачах, связанных с анализом напряженно-деформированного состояния горных (грунтовых) массивов с учетом особенности их границ, находящихся под действием различных нагрузок.

Список источников

1. Турчанинов, И. А. Основы механики горных пород / И. А. Турчанинов, М. А. Иофис, Э. В. Каспарьян. – Л.: Недра. 1989. – 488 с.
2. Глушко, В. Т. Оценка напряженно-деформированного состояния массивов горных пород / В. Т. Глушко, С. П. Гавеля. – М.: Недра, 1986. – 221 с.
3. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М.: Наука, 1989. – 480 с.
4. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.: ГИТТЛ, 1962. – 709 с.
5. Фильчаков, П. Ф. Приближенные методы конформных отображений / П. Ф. Фильчаков. – Киев: Наукова Думка, 1964. – 536 с.
6. Фильчакова, В. П. Конформные отображения областей специального типа : справ. рук. / В. П. Фильчакова. – Киев : Наукова Думка, 1972. – 252 с.
7. Савин, Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Санин. – Киев: Наукова думка, 1968. – 888 с.
8. Колосов, Г. В. Применение комплексных переменных диаграмм и теории функций комплексного переменного к теории упругости / Г. В. Колосов – М.: ОНТИ. 1935. – 224 с.
9. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Р. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
10. Каландия, А. И. Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
11. Космодамианский, А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами / А. С. Космодамианский. – Киев: Вища школа, 1975. – 228 с.
12. Green A. E., Zerna W. Theoretical elasticity. Oxford.: Clarendon Press, 1968. – 457 p.
13. Jian-ke Lu Complex variable methods in plane elasticity. World Scientific, 1995. – 237 p.
14. Brown J.W., Churchill R.V. Complex variables and applications. New York: McGraw Hill, 2009. – 482 p.
15. Партон, В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
16. Хан, Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения / Х. Хан. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
17. Курдин, Н. С. Напряженное состояние в полубесконечных областях с криволинейными границами / Н. С. Курдин, В. Н. Телиянец // Некоторые вопросы механики горных пород: науч. тр. МГИ. – 1968. – С. 18-23.
18. Позняк, Э. Г. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.

19. Ахпателов, Д. М. Напряженное состояние горных массивов с криволинейными границами в поле гравитации / Д. М. Ахпателов // Труды ВСЕГИНГЕО. – 1972. – Вып. 48. – С. 39-53.
20. Тер-Мартirosян, З. Г. Напряженное состояние горных массивов в поле гравитации / З. Г. Тер-Мартirosян, Д. М. Ахпателов // Доклады АН СССР – 1975. – Т. 220. – № 2. – С. 312-314.
21. Тер-Мартirosян, З. Г. Напряженное состояние горных массивов при действии местной нагрузки и объемных сил / З. Г. Тер-Мартirosян, Р. Г. Манвелян // Бюллетень по инженерной сейсмологии. – 1975. – № 9. – С. 51-57.
22. Цытович, Н. А. Основы прикладной геомеханики в строительстве / Н. А. Цытович, З. Г. Тер-Мартirosян. – М.: Высшая школа, 1981. – 317 с.
23. Цветков, В. К. Расчет устойчивости откосов и склонов / В. К. Цветков. – Волгоград. :Ниж.-Волж. кн.изд-во, 1979. – 235 с.
24. Цветков В. К. Решение задачи теории упругости для весомой полуплоскости, подверженной сосредоточенным нагрузкам / В. К. Цветков // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1974. – № 1. – С. 33- 7.
25. Богомолов, А. Н. Расчет несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов в упругопластической постановке / А. Н. Богомолов. – Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 1996. – 150 с.
26. Лыткин, В. А. Напряженное состояние основания под фундаментом глубокого заложения / В. А. Лыткин, Н. Н. Фотиева // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1970. – № 4. – С. 34- 6.
27. Lawler G.F. Conformally invariant processes in the plane. Math. Surveys Monogr., 114, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. – 242 p.
28. Цветков В. К. Определение форм сечений горных выработок с заданными напряжениями на контурах / В. К. Цветков // Физико-технические разработки полезных ископаемых. – 1986. – № 2. – С. 24 - 29.
29. Цветков, В. К. Расчет рациональных параметров горных выработок / В. К. Цветков. – М.: Недра, 1993. – 251 с.
30. Богомолов, А. Н. Определение глубины заложения горизонтальной выработки на основе анализа напряженного состояния вмещающего массива / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, А. Н. Ушаков // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2017. – № 5. – С. 2-9.
31. Богомолов, А. Н. О напряжениях в контурных точках подземных выработок различного поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, А. Н. Ушаков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. – 2018. – Т. 9. – № 3. – С.54-70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06
32. Богомолов, А. Н. Анализ напряженного состояния на контурах подземных горизонтальных выработок, подверженных равномерному давлению, и определение допустимой глубины их заложения / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, А. Н. Ушаков // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2021. – № 6. – С. 15-18.
33. Фотиева, Н. Н. Расчет обделок тоннелей некругового поперечного сечения / Н. Н. Фотиева. – М.: Стройиздат, 1974. – 240 с.
34. Протосеня, А. Г. Определение напряжений в массиве вблизи закрепленной выработки с учетом неровностей контура и ползучести пород / А. Г. Протосеня, В. А. Ващилин // Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова. – 1969. – Т. LVII. – Вып.1. – С.8-17.